Weiter $[M(\lambda) : L(\lambda)] = 1$ und $\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, N) \leq \ell(M)\ell(N)$

Prop. 1.26 Sei $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ ein Char und $M \in \mathcal{O}$. Wir definieren

$$M^{\chi} := \{ v \in M \mid \forall z \in Z(\mathfrak{g})\, \exists n \in \mathbb{N} : (z - \chi(z))^n v = 0 \}$$

(1) Es gilt $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M^{\chi_n}$ für eine endl. Familie von Charakteren.

(2) Sei $\mathcal{O}_{\chi}$ die volle Unterkategorie der M mit $M = M^{\chi}$. Dann $\mathcal{O} = \bigoplus_{\chi} \mathcal{O}_{\chi}$. Insbesondere liegt jeder unzerlegbare Modul in genau einem $\mathcal{O}_{\chi}$. Insbes. gilt $M \in \mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ für jeden HGM zum Gewicht λ.

Beweis. (1) $\forall \mu \in \Pi(M)$ gilt $M_\mu = \bigoplus_{\chi} M_\mu \cap M^{\chi}$, da M_μ endl-dim, $\mathbb{C}$ alg. abges. und die Wirkung von $Z(\mathfrak{g})$ eine komm. Unteralgebra von $\operatorname{End}(M_\mu)$ definiert (M^{χ} = verallg. Eigenraum). (Satz über die Jordan-Normalform) Da M von endl. vielen Gewichtsvektoren erzeugt wird, folgt die Beh.

(2) folgt aus (1). □

<u>Def.</u> 1.27 Man führt auf der Menge aller einfachen Moduln in $\mathcal{O}$ folgende Äquivalenzrelation $\sim$ ein: $\sim$ ist die reflexiv-~~transitive~~ -symmetrische Hülle der Relation R,

$R(M_1, M_2)$: $\exists\, M \in \mathcal{O}$ und keS

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0, \text{ s.d.}$$

$$M \not\cong M_1 \oplus M_2 \quad (\text{keS spaltet nicht})$$

Sei S ein einfacher Modul.
Man sagt, $M \in \mathcal{O}$ gehöre zum <u>Block</u> von S, falls alle Kompositionsfaktoren von M zu S isomorph sind.

Da $\mathcal{O}$ Noethersch und Artinsch ist, folgt

<u>Prop. 1.28</u> $\mathcal{O}$ ist die direkte Summe von seinen Blöcken. Insbesondere ist jeder Block in einem $\mathcal{O}_\chi$ enthalten.

~~Def. 1.29. Der Prinzipalblock von $\mathcal{O}$ ist~~

~~$\mathcal{O}_0$~~

Prop. 1.29. Ist $\chi = \chi_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, so ist $\mathcal{O}_\chi$ ein Block von $\mathcal{O}$; („ganzzahliger Block").

Beweis. Nach ~~Prop. 1.9.~~ Theorem 1.22. sind die einfachen Moduln in $\mathcal{O}_\chi$ ~~von $M \in \mathcal{O}_\chi$~~ ~~Subquotienten~~ genau $L(w\cdot\lambda)$, $w \in W$.

Sei $\mu := s_\alpha \cdot \lambda$. ~~, α einfa~~ ~~Ist~~ O.B.d.A ist $\mu < \lambda$, sonst vertausche (ist $\lambda = \mu$ oder $\lambda < \mu$ und was) die Rollen von λ und μ.

Nach Prop. 1.9. $\exists\, \phi : M(\mu) \xrightarrow{U(g)\text{-lin}} M(\lambda)$, $\phi \neq 0$

Sei $M := M(\lambda) / \phi(N(\mu))$. Dann ist $\phi(N(\mu)) \subseteq N(\lambda) \subsetneq M(\lambda)$, also $M \neq 0$ und HGW, also unzerlegbar. Man erhält eine keS

$$0 \to L(\mu) = M(\mu)/N(\mu) \longrightarrow M.$$

Es gibt also eine Kompositionsreihe von M, deren Subquotienten mit $L(\mu)$ beginnen und mit $L(\lambda)$ enden. Da M unzerlegbar ist, liegen $L(\mu)$, $L(\lambda)$ im gleichen Block. Es folgt die Beh. $\square$.

2. Formale Charaktere

Def. 2.1

(1) $\mathcal{X} := \left\{ f : \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \;\middle|\; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{h}^* : \operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i - \Gamma \right\}$

Hier $\operatorname{supp} f = \{ \lambda \mid f(\lambda) \neq 0 \}$ und $\Gamma = \langle \Phi^+ \rangle_{\mathbb{N}}$.

$\mathcal{X}$ ist ein kommutativer Ring mit

$$(f+g)(\lambda) := f(\lambda) + g(\lambda)$$

$$(f * g)(\lambda) := \sum_{\mu + \nu = \lambda} f(\mu)\, g(\nu).$$

(2) Sei $M \in \mathcal{O}$. Dann definiere

$$\operatorname{ch} M := \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim M_\lambda \cdot e_\lambda ,$$

wobei $e_\lambda(\mu) := \delta_{\lambda\mu}$. D.h.

$$(\operatorname{ch} M)(\lambda) = \dim M_\lambda .$$

$\operatorname{ch} M$ heißt formaler Charakter von M.

(3) Sei $\mathcal{X}_0 = \langle \operatorname{ch} M \mid M \in \mathcal{O} \rangle_{\mathbb{Z}} \leq \mathcal{X}$.

($\mathcal{X}_0$ ist i. allg. kein ~~[illegible]~~ Ring.)

Prop. 2.2.

(1) Sei $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ keS in $\mathcal{O}$.

Dann gilt $ch\, M = ch\, M' + ch\, M''$.

(2) Sei (M_i) eine Kompositionsreihe von $M \in \mathcal{O}$.

Dann gilt $$ch\, M = \sum_{i=1}^{n} ch(M_i/M_{i-1}),$$

also hängt $ch\, M$ nur von den Kompositionsfaktoren ab, d.h.

$$ch\, M = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} [M : L(\lambda)]\, ch\, L(\lambda)$$

(3) Sei $K(\mathcal{O})$ die Grothendieckgruppe von $\mathcal{O}$, d.h.

$$K(\mathcal{O}) = \mathbb{Z}[[M] \mid M \in \mathcal{O}] / N,$$

wobei $[M]$ = Isomorphieklasse von M und

N der Normalteiler, der von $[M] - [M'] - [M'']$

für jede keS $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ erzeugt wird.

Dann ist durch

$$ch\, M \in \mathcal{X}_0 \longmapsto [M] \in K(\mathcal{O})$$

ein ~~Gruppen~~ Isomorphismus abelscher Gruppen definiert.

(4) Für L, $\dim L < \infty$, und $M \in \mathcal{O}$ ist

$$\operatorname{ch}(M \otimes L) = \operatorname{ch} M * \operatorname{ch} L.$$

Beweis:

(1) Die Behauptung folgt sofort aus

$$\dim M_\lambda = \dim M'_\lambda + \dim M''_\lambda,$$

was offensichtlich ist, da M ein halb-einfacher $\mathfrak{h}$-Modul ist.

(2) Dies folgt sofort aus (1).

(3) Die Abb.

$$\mathbb{Z}[[M] \mid M \in \mathcal{O}] \longrightarrow \mathcal{X}_0$$
$$[M] \longmapsto \operatorname{ch} M$$

ist wohldefiniert. Aus (1) folgt, dass sie eine $\mathbb{Z}$-lineare Abb. $K(\mathcal{O}) \to \mathcal{X}_0$ definiert.

Da $\mathcal{X}_0$ von den $\operatorname{ch} M$ aufgespannt wird, ist sie surjektiv. Offenbar sind die $[L(\lambda)]$ in $K(\mathcal{O})$ $\mathbb{Z}$-linear unabh. Damit $K(\mathcal{O})$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

Da $\operatorname{ch} L(\lambda) = e_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} m_{\mu\lambda} e_\mu$ zu ~~und~~ die e_λ's in $\mathcal{X}_0$ l.u. sind, sind die $\operatorname{ch} L(\lambda)$ in $\mathcal{X}_0$ l.u. Es folgt die Beh.

(4) Dies folgt aus $(M \otimes L)_\lambda = \bigoplus_{\mu+\nu=\lambda} M_\mu \otimes L_\nu$. $\square$

<u>Bem. 2.3</u> Aus Theorem 1.12 wissen wir, dass

$$\dim L(\lambda) < \infty \iff \lambda \in \Lambda^+ \iff \forall_{\substack{w:\\ \mu}} \dim L(\lambda)_\mu = \dim L(\lambda)_{w\mu}$$

$$\iff \text{ch } M \text{ ist } W\text{-invariant.}$$

$(W \curvearrowright \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*})$

<u>Prop. 2.4</u> Definiere die Kostant-Partitionsfunktion $p \in \mathcal{X}$ durch

$$p(\lambda) = \#\left\{ (c_\alpha) \in \mathbb{N}^{\Phi^+} \;\middle|\; \lambda = -\sum_\alpha c_\alpha \cdot \alpha \right\}.$$

Dann gilt $\quad \text{ch } M(\lambda) = p * e_\lambda$, insbesondere

$$\text{ch } M(0) = p \in \mathcal{X}_0.$$

<u>Beweis:</u> Es gilt $M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathbb{C}_\lambda$ als $\mathfrak{h}$-Modul,

also

$$\dim M(\lambda)_{\lambda-\gamma} = p(-\gamma) \quad \forall \gamma \in \langle \Phi^+ \rangle_{\mathbb{N}}. \quad \square$$

<u>Bem. 2.5.</u> Mit ~~Ab~~ $a_{\lambda\mu} := [M(\lambda) : L(\mu)]$ gilt

$$\text{ch } M(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \le \lambda \\ \mu \in W \cdot \lambda}} a_{\lambda\mu} \, \text{ch } L(\mu) \quad \text{mit } a_{\lambda\mu} \in \mathbb{N} \text{ und } a_{\lambda\lambda} = 1.$$

Da die Summe endlich ist, kann man die Relation invertieren

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \mathrm{ch}\, M(\lambda) - \sum_{\substack{\mu<\lambda \\ \mu\in W\cdot\lambda}} a_{\lambda\mu}\, \mathrm{ch}\, L(\mu)$$

$$= \dots = \sum_{\substack{\mu\leq\lambda \\ \mu\in W\cdot\lambda}} b_{\lambda\mu}\, \mathrm{ch}\, M(\mu) = \sum_{\substack{w\in W \\ w\cdot\lambda\leq\lambda}} b_{\lambda w}\, \mathrm{ch}\, M(w\cdot\lambda)$$

mit $b_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}$ und $b_{\lambda\lambda}=1$. , $b_{\lambda w} := b_{\lambda, w\cdot\lambda}$, $b_{\lambda 1} = 1$.

$\frac{1}{+}$ 22.11.2013

Beispiel 2.5. Erinnerung $\mathcal{X}, \mathcal{X}_0, \mathrm{ch}\, M$; $\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum b_{\lambda w}\, \mathrm{ch}\, M(w\cdot\lambda)$ Bestimmung von $b_{\lambda w}$?

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\lambda\in\mathbb{N} = \Lambda_+$ (Andernfalls $\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \mathrm{ch}\, M(\lambda)$)

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \mathrm{ch}\, M(\lambda) - \mathrm{ch}\, M(-\lambda-2)$$

$$b_{\lambda,1} = 1 \quad , \quad b_{\lambda, s_\alpha} = -1 \quad \text{unabh. von } \lambda\in\Lambda_+.$$

Für $\dim L(\lambda) < \infty$ kann man die W-Invarianz ausnutzen, um $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ auszurechnen.

Theorem 2.6 (Weylsche Charakterformel)

Sei $\lambda\in\Lambda^+$. Dann gilt mit $q := \prod_{\alpha>0} e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2}$:

$q\in\mathcal{X}$ und

$$q * \mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)}\, e(w(\lambda+\rho)).$$

Hier ist $\ell(w) = \min\{n \mid \exists\, i_1,\dots,i_n : w = s_{i_1}\cdots s_{i_n}\}$.

Insbesondere

$$q = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)}\, e_{w\rho} \quad \text{(Weylsche Nennerformel)}$$

Der Beweis erfordert einige Lemmata

<u>Lemma 2.6.1</u> Mit $f_\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} e_{-k\alpha}$ $\forall \alpha \in \Phi^+$ gilt

(1) $p = \prod_{\alpha>0} f_\alpha$ (2) $(e_0 - e_{-\alpha}) * f_\alpha = e_0$

<u>Beweis</u>

(1) $$\left(\prod_{\alpha>0} f_\alpha\right)(\lambda) = \sum_{\lambda = \sum_{\alpha>0} \mu_\alpha} f_\alpha(\mu_\alpha)$$

$$= \sum_{\lambda = -\sum_{\alpha>0} c_\alpha \cdot \alpha} 1 = p(\lambda)$$

(2) $$((e_0 - e_{-\alpha}) * f_\alpha)(\lambda) = f_\alpha(\lambda) - f_\alpha(\lambda+\alpha)$$

$$= \begin{cases} 1-1=0 & \lambda = -k\alpha \quad k \geq 1 \\ 1-0 = 1 & \lambda = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = e_0(\lambda)$$

□

<u>Lemma 2.6.2</u> $q \in \mathcal{X}$ und $\forall w \in W: wq = (-1)^{l(w)} q$.

<u>Beweis</u> $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \alpha \Rightarrow e_\rho = \prod_{\alpha>0} e_{\alpha/2}$.

Damit $$q = \prod_{\alpha>0} e_{\alpha/2} * (e_0 - e_{-\alpha}) = e_\rho * \prod_{\alpha>0} (e_0 - e_{-\alpha}).$$

Nun $s_i(\Phi^+) = (\Phi^+ \setminus \{+\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i\}$, also

$$s_i q = \prod_{\substack{\alpha>0 \\ \alpha \neq \alpha_i}} e_{\alpha/2} - e_{-\alpha/2} \cdot (e_{-\alpha_i/2} - e_{\alpha_i/2}) = -q.$$ □

Lemma 2.6.3 Es gilt $q*p = e_\rho$ und folglich

$$q * \mathrm{ch}\, M(\lambda) = e_{\lambda+\rho} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Beweis:

$$q*p = e_\rho * \left(\prod_{\alpha>0}(e_0 - e_{-\alpha})\right) * p \underset{\text{Lemma 2.6.1}}{=} e_\rho * \prod_{\alpha>0} \big(\underbrace{(e_0-e_{-\alpha})*f_\alpha}_{\underset{\text{Lemma 2.6.2}}{=} e_0}\big)$$

$$= e_\rho$$

Folglich $q * \mathrm{ch}\, M(\lambda) \underset{\text{Prop. 2.4.}}{=} q*p*e_\lambda = e_\rho * e_\lambda = e_{\rho+\lambda}$. □

Beweis von Theorem 2.6.

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w\in W} b_{\lambda w}\, \mathrm{ch}\, M(w\cdot\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad q*\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w\in W} b_{\lambda w}\, \underbrace{e_{\rho+w\cdot\lambda}}_{=w(\lambda+\rho)}$$

$b_{\lambda 1} = 1 \quad \forall s \in W:$

$$s(q*\mathrm{ch}\, L(\lambda)) = (-1)^{\ell(s)}\, q*\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{w\in W} b_{\lambda w}\, e_{sw(\lambda+\rho)}$$

$$= \sum_{w\in W} b_{\lambda s^{-1}w}\, e_{w(\lambda+\rho)}$$

$$\Rightarrow \quad (-1)^{\ell(s)} b_{\lambda w} = b_{\lambda s^{-1} w}$$

$$\overset{w=1}{\Rightarrow} \quad b_{\lambda s^{-1}} = (-1)^{\ell(s)} \quad \Rightarrow \text{Beh.} \quad □$$

Kor. 2.7 (Kostant-Multiplizitätsformel) ~~Sei~~ $\lambda \in \Lambda_+$, $\mu \le \lambda$

$$\Rightarrow \quad \dim L(\lambda)_\mu = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)}\, p(\overbrace{\mu - w\cdot\lambda}^{\mu+\rho-w(\lambda+\rho)})$$

Beweis.

$$\dim L(\lambda)_{\mu+\rho} = (e_\rho * ch\, L(\lambda))(\mu+\rho)$$

$$= (p * q * ch\, L(\lambda))(\mu+\rho) = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} \underbrace{(p * e_{w(\lambda+\rho)})(\mu+\rho)}_{= p(\mu+\rho - w(\lambda+\rho))} \quad \square.$$

Übung 2.8 Sei $\nu \in \Gamma = \langle \Phi^+ \rangle_{\mathbb{N}} = \langle \Delta \rangle_{\mathbb{N}}$. Man zeige:

Für $n >> 0$ ist $\dim L(n\rho)_{n\rho - \nu} = p(-\nu)$.

Bem. 2.9. Da $ch\, L(\lambda)$ eine formale "Spur" ist, erwartet man, dass sich ~~ch~~ $\dim L(\lambda)$ durch die "Auswertung"

$v(e_\mu) = 1$ von $ch\, L(\lambda)$ bestimmen lässt. Allerdings

Ist $v(q) = v(\prod_{\alpha>0} (e_\alpha - 1) * e_{-\rho}) = 0$ und

$v(\sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} e_{w(\lambda+\rho)}) = \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} = 0$

z.B. für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$ch\, L(\lambda) = e_\lambda + e_{\lambda-2} + \dots + e_{-\lambda} = \frac{e_{\lambda+1} - e_{\lambda-1}}{e_1 - e_{-1}}$$

Man braucht also eine algebraische "Regel von de l'Hospital", um dies durchzuführen.

Theorem 2.9 (Weylsche Dimensionsformel) Sei $\lambda \in \Lambda^+$. Dann gilt

$$\dim L(\lambda) = \frac{\prod_{\alpha>0} \langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle}{\prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle}.$$

Beweis. Sei $\mathcal{Y} \leq \mathcal{A}$ der von e_μ, $\mu \in \Lambda$, erzeugte Unterring von $\mathcal{A}$. (Die Elemente haben endlichen Träger, der in Λ enthalten ist.)

Def. $\forall \alpha \in \Phi^+$: $\partial_\alpha : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$ durch $\partial_\alpha e_\mu = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle e_\mu$.

Dann gilt
$$\partial_\alpha(\underbrace{e_{\mu+\nu}}_{e_\mu * e_\nu}) = \langle \mu+\nu, \alpha^\vee \rangle e_{\mu+\nu}$$
$$= (\langle \mu, \alpha^\vee \rangle e_\mu) * e_\nu + e_\mu * (\langle \nu, \alpha^\vee \rangle e_\nu) =$$
$$= (\partial_\alpha e_\mu) * e_\nu + e_\mu * (\partial_\alpha e_\nu)$$, also ist

∂_α eine Derivation von $\mathcal{Y}$. Setze $\partial_I := \prod_{\alpha \in I} \partial_\alpha$ für $I \subseteq \Phi^+$.
(Die ∂_α kommutieren)

Definiere außerdem $v : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch $v(e_\mu) = 1$. v ist ein Charakter des Rings $\mathcal{Y}$.

Es gilt
$$e_{-\rho} * \prod_{\alpha>0} (e_\alpha - 1) = q = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e_{w\rho}.$$

Wende $v\partial$ an:
$$v\partial_{\Phi^+}(q * \mathrm{ch}\, L(\lambda)) = \sum_{\Phi^+ = I \sqcup J} v\partial_I(q) \cdot v\partial_J(\mathrm{ch}\, L(\lambda))$$

$$v\partial_I(q) = \sum_{I = I_{-\rho} \sqcup \bigsqcup_{\alpha>0} I_\alpha} v\partial_{I_{-\rho}}(e_{-\rho}) \cdot \prod_{\alpha>0} v\partial_{I_\alpha}(e_\alpha - 1)$$

wobei $$v\partial_{I_\alpha}(e_\alpha - 1) = \begin{cases} 0 & I_\alpha = \emptyset \\ \prod_{\beta_\alpha \in I_\alpha} \langle \alpha, \beta_\alpha^\vee \rangle & I_\alpha \neq \emptyset \end{cases}$$

Daher $$v\partial_{\Phi^+}(q \operatorname{ch} L(\lambda)) = v\partial_{\Phi^+}(q) \cdot \underbrace{v(\operatorname{ch} L(\lambda))}_{= \dim L(\lambda)}$$

Andererseits

$$v\partial_{\Phi^+}(q) = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \underbrace{v\partial_{\Phi^+}(e_{w\rho})}_{\substack{= \prod_{\alpha>0} \langle w\rho, \alpha^\vee \rangle \\ = \prod_{\alpha>0} \langle \rho, (w^{-1}\alpha)^\vee \rangle \\ = \prod_{\beta \in w^{-1}\Phi^+} \langle \rho, \beta^\vee \rangle = (*)}} = (**)$$

Es gilt $$w^{-1}\Phi^+ = \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^+ \sqcup \{-\beta \mid \beta \in \Phi^+ \setminus w^{-1}\Phi^+\}$$

(da $\Phi = \Phi^+ \sqcup -\Phi^+$ und $w^{-1}\Phi = \Phi$), also

$$(*) = \sum_{w \in W} \underbrace{(-1)^{\#\{\beta \in \Phi^+ \mid w^{-1}\beta \in -\Phi^+\}}}_{= (-1)^{\ell(w)}} \prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle.$$

Somit $$(**) = \sum_{w \in W} \prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle = \# W \cdot \prod_{\alpha>0} \langle \rho, \alpha^\vee \rangle.$$

Andererseits

$$v\partial_{\Phi^+}\Big(\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e_{w(\lambda+\rho)}\Big) = \# W \prod_{\alpha>0} \langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Übung 2.10 Für $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, gebe man einen einfachen Modul von Dimension $k^{\#\Phi^+}$ an.

Bem. 2.11. Die Formel für $\operatorname{ch} L(\lambda)$ legt nahe, dass es eine exakte Sequenz

$$\cdots \quad \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w)=k}} M(w\cdot\lambda) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w)=1}} M(w\cdot\lambda) \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

gibt. Immerhin können wir den Anfang dieser Sequenz bestimmen.

Prop 2.12 Sei $\lambda \in \Lambda_+$. Es gibt eine exakte Sequenz

$$\bigoplus_{\substack{w \in W \\ l(w)=1}} M(w\cdot\lambda) = \bigoplus_{i=1}^{l} M(s_{\alpha_i}\cdot\lambda) \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

Beweis Nach Prop. 1.9. existieren von 0 verschiedene $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-lineare Abb. $M(s_{\alpha_i}\cdot\lambda) \xrightarrow{\phi_i} M(\lambda)$. Z. z. ist, dass $N(\lambda) = \sum_i \operatorname{im} \phi_i$.

Sei $I = \operatorname{Ann}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} v_\lambda$ $(v_\lambda \in M(\lambda))$, so dass $M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I$. Definiere

$$J = (I, y_i^{n_i+1} \mid i=1,\dots,l), \quad n_i = \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle.$$

Beh.: $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/J = L(\lambda)$

Aus der Beh. folgt die Aussage der Prop., denn

~~d~~ dann ist unter dem Iso $M(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I$ gerade

$N(\lambda) = J/I = \mathrm{Ann}\, \Sigma_i \operatorname{im} \phi_i$.

Die Beh. folgt aus

Beh': $M := \mathcal{U}(\mathfrak{g})/J$ ist endlich-dimensional.

Denn dann ist $0 \neq M$ unzerlegbar und endl.-dim. $\Rightarrow$ einfach.
Aber da $L(\lambda)$ ein Quotient von $M(\lambda)$ ist, folgt $M = L(\lambda)$.

Beweis von Beh': Nach Bem. 1.13 reicht es zu zeigen,

dass die y_i lokal nilpotent auf M wirken.

Da die $y_1, \dots, y_\ell$ $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$ erzeugen (als Algebra),

spannen die $y_{i_1} \cdots y_{i_m} + J$, $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, \ell\}$,

M auf. Gelte $y_i^k (y_{i_1} \cdots y_{i_m}) \equiv 0 \ (J)$ $(k \geq 1)$

Dann gilt
$$y_i^{k+3}(y_{i_0} y_{i_1} \cdots y_{i_m}) = \sum_{j=0}^{k+3} \binom{k+3}{j} \operatorname{ad}^j(y_i)(y_{i_0})\, y_i^{k+3-j} y_{i_1} \cdots y_{i_m}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \binom{k+3}{j} \operatorname{ad}^j(y_i)(y_{i_0})\, \underbrace{y_i^{k+3-j}\, y_{i_1} \cdots y_{i_m}}_{\equiv 0\ (J)} \equiv 0\ (J)$$

$\#\{k \in \mathbb{N} \mid k\alpha_i + \alpha_{i_0} \in \Phi^+\} \leq 4$

Induktion nach $m \Rightarrow$ Beh'. $\square$